

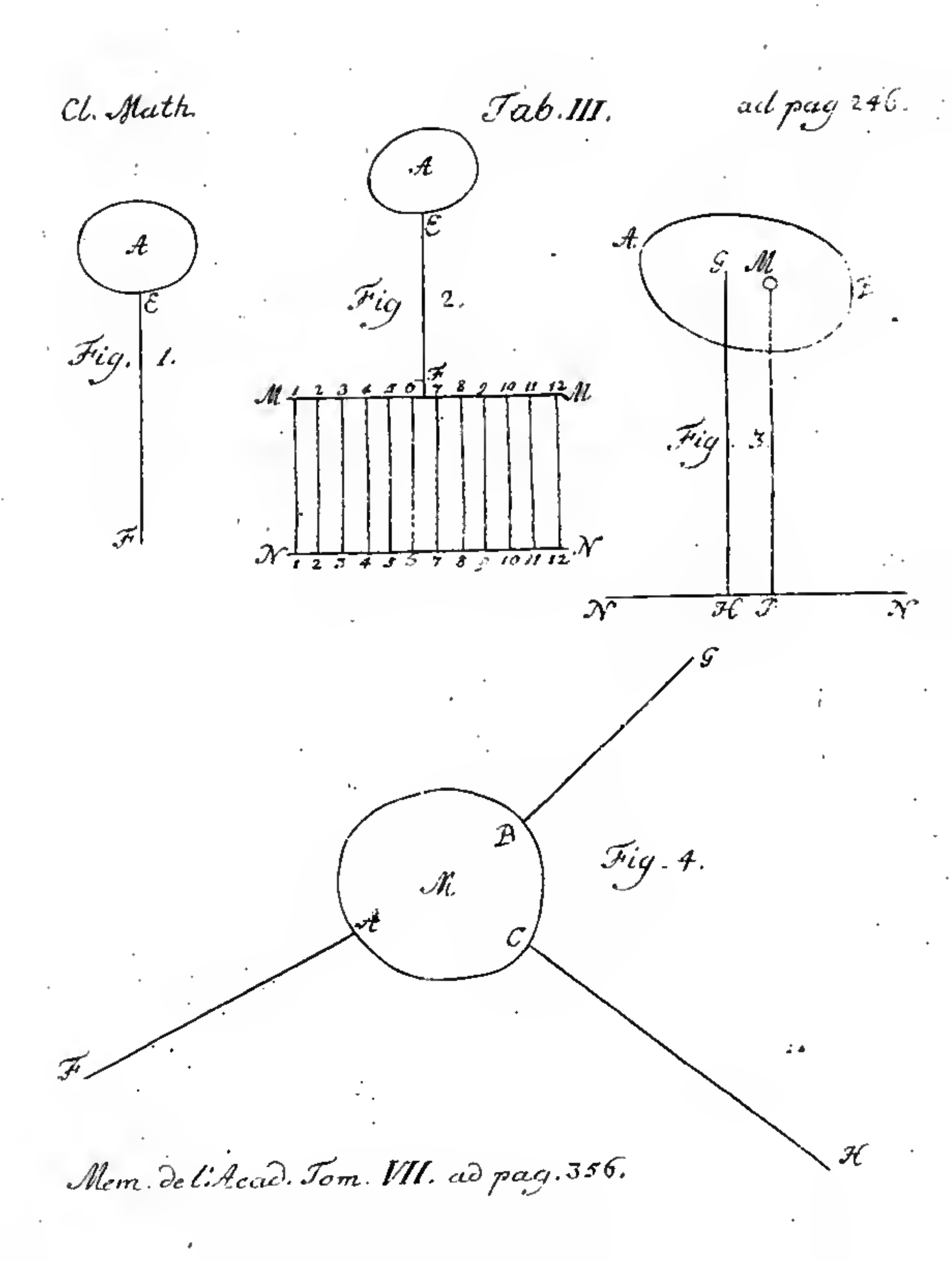
ESSAY
D'UNE DE'MONSTRATION ME'TAPHYSIQUE
DU PRINCIPE GÉNÉRAL DE L'EQUILIBRE.

PAR M. EULER.

I.

Comme l'équilibre eſt produit par l'action des forces, il faut commencer par fixer la juſte idée des forces & de la manière dont elles agiſſent. Or on nomme force, tout ce qui eſt capable de changer l'état des corps, tant de leur mouvement que du repos: car, puisque tout corps de ſoi-même demeure toujours dans le même état, ſoit de repos ou de mouvement, s'il y arrive quelque changement, la cauſe ſubſiſte néceſſairement hors du corps; & c'eſt cette cauſe, quelle qu'elle ſoit, qui eſt nommée force. Dans chaque force il y a deux choſes à conſidérer, la quantité & la direction: par la quantité on comprend combien une force eſt plus grande ou plus petite qu'une autre, & la direction nous donne à connoitre en quel ſens chaque force agit ſur les corps pour en troubler l'état.

Fig. 1. II. Pour mieux éclaircir cela, ſoit A un corps quelconque, ſur lequel agit une force quelconque ſuivant la direction E F: on comprend que ſi le corps étoit en repos, il ſeroit entrainé par cette force préciſément ſelon la direction E F; & s'il étoit en mouvement, il ſeroit détourné de ſa route ſelon cette même direction. Ainſi la direction eſt toujours la ligne droite, ſur laquelle la force tend à tranſporter le corps; & cette tendance ſuffit à déterminer la directiou, puis-


A
E
Fig. 1.
F
A
E
Fig 2.
F
M 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 M
N 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 N
A.
G M
I
Fig. 3.
N H I N
G
B
M.
A
C
Fig. 4.
F
H

puisqu'il n'eſt pas ici queſtion du mouvement actuel, qui ſera imprimé au corps par la force, ce qui demanderoit ſans doute une recherche plus profonde, & qui ne feroit plus du reſſort de la Métaphyſique. Je me borne ici à fixer uniquement l'idée de la direction, ſuivant laquelle une force agit ſur un corps.

III. Il eſt auſſi aiſé de ſe former une idée juſte de la quantité des forces en général : car, puiſque la quantité ne ſe connoit que par comparaiſon, on n'a qu'à prendre une certaine force connuë au lieu de l'unité, qui ſervira de meſure commune de toutes les autres forces. Ainſi prenant l'unité pour marquer cette force connuë, lorsqu'on ſçait le nombre, qui convient à la force EF, on aura une juſte idée de ſa quantité ; puisque ce nombre indique, combien de fois la force EF contient en ſoi la force priſe pour l'unité.

IV. On peut encore conſidérer la choſe de cette manière. Qu'on conçoive au Corps A attachée la corde EF, à laquelle tient une barre MM à angles droits, qui ſoit tirée vers une autre barre fixe NN par un certain nombre de filets, 11, 22, 33, 44, &c. dont chacun ait une force de ſe contracter égale à la force priſe pour l'unité. Donc, ſi N marque le nombre de ces filets, ce nombre marquera en même tems la force, dont le corps A ſera tiré par la corde EF ; car toutes les forces, dont les filets tendent à ſe contracter, concourent à approcher la barre MM de la barre immobile NN ; & partant, puisque leurs forces ſont égales chacun à 1, & leur nombre $= N$, la force totale, qui en réſulte pour entrainer le corps A avec la barre MM, ſera $= N$, & la corde EF répreſentera en même tems la direction de cette force, qui agit ſur le corps A. Fig. 2.

V. Cela poſé, il eſt clair que l'action de cette force conſiſte dans la contraction actuelle des filets 11, 22, 33, &c, & lorsque le corps A eſt effectivement entrainé par la corde EF, l'action ſera d'autant plus grande, plus les filets ſeront devenus courts. Or je ſuppoſe ici, que les filets conſervent toujours la même force pour ſe contracter,

ter, de forte que la force totale, qui résulte de leur union, demeure conſtamment $= N$. Ainſi le racourciſſement des filets fournira la plus juſte meſure de l'action de la force totale N : & partant ſi nous ſuppoſons, qu'ils ſe ſoient contractés de la quantité z, ou que la longueur de chacun ſoit diminuée de z, de ſorte que le corps A ait été entrainé par l'eſpace $= z$, cette action ſera exprimée par le produit Nz, qui marque le raccourciſſement total de tous les filets.

VI. Soit x la diſtance du corps A au plan fixe NN, & b la longeur de la corde EF, qu'on doit conſidérer comme une quantité conſtante, & $x - b$ indiquera la longeur de chaque filet. Donc la somme des longueurs de tous les filets enſemble ſera $= N(x - b)$, qui eſt par conſéquent la quantité, dont la diminution eſt le véritable objet de la force, ou bien la force, entant qu'elle ſollicite le Corps A, tend à rendre cette quantité $N(x - b)$ de plus en plus petite. Or b étant une quantité conſtante, l'action de la force conſiſte dans la diminution de la quantité Nx ; car ſi les filets ſe contractent de la quantité z, on aura Nz pour la diminution de la quantité Nx.

VII. Voilà donc en quoi conſiſte, pour ainſi dire, le but de la force N, que nous conſidérons ; c'eſt de diminuer de plus en plus la quantité Nx, qui eſt le produit de la force N par la diſtance du corps A à la barre immobile NN. Or il eſt évident que cette diſtance abſoluë n'entre point proprement dans la conſidération ; car ſi nous concevions la barre NN éloignée à toute autre diſtance du corps A, la même contraction des filets produiroit toujours la même diminution dans la quantité Nx, pourvû que cette barre ſoit toujours perpendiculaire à la direction EF, ſuivant laquelle on conçoit, que le corps eſt ſollicité par la force N.

VIII. Ayant donné cette idée de l'action de chaque force, on en tirera aiſément ce principe général :

Que toute force agit autant qu'elle peut.

&

& dès qu'on aura compris le ſens de cette propoſition, on ne pourra refuſer de l'admettre comme un Axiome. Car, puisque l'action d'une force conſiſte dans la contraction des filets, dont nous concevons la force compoſée; ces filets ne ceſſeront pas de ſe contracter, tant qu'ils ne rencontrent pas un obſtacle invincible, qui s'oppoſe à leur contraction ultérieure: donc ces filets, & partant auſſi la force qui en eſt compoſée, agira autant qu'elle peut, ou que les circonſtances lui permettront d'agir.

IX. Lorsqu'un corps, ou un ſyſtème de corps, eſt en équilibre, puisque les forces dont il eſt ſollicité, ſont tellement oppoſées entr'elles, qu'elles ne ſçauroient agir, ou remuer le corps, il faut que l'action des forces ſoit la plus grande, ou que les filets, dont nous concevons les forces compoſées, ſe trouvent dans leur plus grande contraction, de ſorte qu'il ſeroit impoſſible qu'elles ſe contractaſſent davantage. Ainſi un corps, ou ſyſtème de corps, ſera en équilibre, lorsqu'il eſt diſpoſé en ſorte avec les forces dont il eſt ſollicité, que la contraction des filets eſt la plus grande, ou que la ſomme des longueurs de tous les filets pris enſemble ſoit la plus petite qu'il eſt poſſible.

X. Qu'on conſidére une force quelconque, qui concourre avec d'autres forces, pour maintenir un corps en équilibre; & ſoit cette force $= N$. Qu'on prenne à volonté ſur la direction de cette force un point fixe, & ſoit x la diſtance de ce point à celui du corps, auquel la force eſt appliquée, & nous avons vû, que par la contraction des filets ſus-mentionnés cette quantité Nx devient diminuée. Donc, ſi l'on aſſemble dans une ſomme ces formules Nx, qui couviennent à chacune des forces ſollicitantes, cette ſomme doit être la plus petite, puisque la contraction de tous les filets pris enſemble doit être la plus grande dans le cas d'équilibre.

XI. La force de ce raiſonnement conſiſte en ce que nous réduiſons toutes les forces à un certain nombre de filets ſemblables & égaux en-

 tr'eux,

tr'eux, qui par leur force contractive composent les forces mêmes. Ainsi, lorsque le corps qui soutient l'action des forces, est en équilibre, il faut en vertu de nôtre axiome, que tous ces filets se trouvent dans leur plus grande contraction. Car, s'il étoit possible qu'ils se contractassent davantage, ils le seroient, & partant le corps ne seroit pas en équilibre. Donc, si le corps est en équilibre, il s'ensuit nécessairement, que les filets ne sauroient recevoir une plus grande contraction, ou ce qui revient au même, que la somme de toutes les forces sollicitantes soit la plus petite.

XII. Voilà donc une régle générale pour tous les équilibres des corps, qui sont sollicités par des forces quelconques, pourvû que ces forces soient constantes, ou qu'elles tirent avec les mêmes efforts, à quelques distances que les corps se trouvent à leur égard. Suivant cette régle on considérera chaque force à part, on prendra sur sa direction un point fixe, & on multipliera la force par la distance de ce point au lieu de l'application de la force. Ensuite on assemblera tous ces produits dans une somme, laquelle sera un *Minimum* dans le cas d'équilibre. Réciproquement donc on pourra déterminer, par la Méthode des plus grands & plus petits, l'état d'équilibre, lorsque les forces sont constantes; ou que la quantité N qui a exprimé jusqu'ici la force, n'est pas dépendante de la quantité x, qu'on considére ici comme variable.

Fig. 3. XIII. De cette espece est la force de la gravité, entant que nous faisons abstraction de sa variation, qu'elle subit en des distances ou plus grandes, ou plus petites, du centre de la Terre. Donc si nous considérons un corps quelconque AB, dont les parties ne soyent sollicitées que par la gravité, nous envisagerons chaque particule M séparément, qui étant sollicitée suivant la direction verticale MP, nous y prendrons à volonté un point fixe P, qui soit dans la ligne horizontale NN, nous poserons la distance $MP = x$; & nommant la masse de la particule $M = dM$, ce dM exprimera en même tems le poids de la parti-

particule M, ou la force dont elle est sollicitée suivant MP : donc xdM sera le produit Nx pour cette particule ; & partant la somme de tous les xdM, qui résultent de tontes les particules du corps, sera la plus petite, lorsque le corps se trouve en équilibre.

XIV. Mais on sçait que la somme de tous les xdM exprime le produit du poids entier du corps par la distance de son centre de gravité à la même ligne horizontale NN. Posant donc M pour le poids du corps, dont G soit le centre de gravité, & GH sa distance de de NN, le produit M. GH étant égal à la somme de tous les xdM, sera un *Minimum* en cas d'équilibre. D'où l'on voit que les corps pésans ne sçauroient être en équilibre, à moins que leur centre de gravité ne se trouve aussi bas qu'il est possible. Ainsi ce grand principe de la plus grande descente du centre de gravité, connu depuis longtems, sans qu'il eut été jamais démontré, est une suite nécessaire de ce que je viens d'établir.

XV. Mais la régle établie jusqu'ici ne peut être appliquée qu'aux forces, qui agissent avec le même effort à toutes distances, ou qui sont constantes. Car, si les forces ne sont pas constantes, leur résolution en des filets employée cy-dessous n'a plus lieu, ou bien il faudra supposer le nombre des filets variable, pendant qu'ils se contractent. Pour cet effet ce que nous avons posé cy-dessus $= Nx$ doit être décomposé dans ses élémens Ndx ; & puisque pour chaque distance x la force ou le nombre des filets est variable, soit elle $= P$, & ayant Pdx pour l'élément de la distance dx, l'intégrale $\int Pdx$ sera la juste valeur, qui doit être prise au lieu de Nx, lorsque la force est variable.

XVI. Pour mettre cela dans un plus grand jour, on n'a qu'à regarder, comment les formules Nx tirées des forces constantes deviennent un *Minimum*. Or cela arrive, lorsque leurs différentiels Ndx pris ensemble évanouïssent, & dans ces différentiels il n'est plus ques-

 tion

tion, si la force N est constante ou non. Donc, si la force est variable, savoir $= P$, on aura $P\,dx$ au lieu de $N\,dx$ pour en égaler la somme à zero; d'où il est évident, que la formule qui devient alors un *Minimum*, sera composée de ces formules $\int P\,dx$; qu'on doit tirer de chacune des forces sollicitantes: où il est clair que dans le cas des forces constantes, ou de $P = N$, on aura les mêmes formules Nx pour rendre un *Minimum*, que nous avons trouvées cy-dessus.

Fig. 4. XVII. Voici donc le Principe universel, qui convient à tout état d'équilibre, & dont la vérité vient d'être déduite des axiomes, que personne ne sçauroit révoquer en doute. En vertu de ce principe on considérera chaque force dont le corps en équilibre est sollicité séparément en cette manière: soient P, Q, R, &c. les forces, qui agissent sur le corps M selon les directions AF, BG, CH; sur lesquelles on prenne des points fixes F, G, H à volonté; & ayant nommé les distances $AF = x$, $BG = y$, $CH = z$, l'état d'équilibre aura toujours cette propriété, que la somme des formules $\int P\,dx + \int Q\,dy + \int R\,dz$ &c. y est un *Minimum*.

XVIII. On voit bien qu'il est indifférent dans cette recherche, à quelque distance on veuïlle prendre ces points F, G, H, pourvû qu'ils soyent regardés dans le calcul comme fixes; car les différentiels dx, dy, dz demeureront toujours les mêmes. Or lorsque les forces sont variables, comme on considére les forces centrales, en les exprimant par de certaines fonctions des distances à leurs centres, il conviendra pour la commodité du calcul de prendre les points F, G, H, dans les centres mêmes des forces. Ainsi, s'il étoit $P = \alpha x^n$, $Q = \delta y^n$, & $R = \gamma z^n$, l'expression à rendre un *Minimum* seroit,

$$\frac{\alpha}{n+1}x^{n+1} + \frac{\beta}{n+1}y^{n+1} + \frac{\gamma}{n+1}z^{n+1} \text{ \&c.}$$

&

& cette recherche du *Minimum* ſe fera aiſément dans tous les cas où de telles forces ſe trouvent.

XIX. Puisque chaque force P fournit dans le calcul une telle formule $\int P\,dx$, cette valeur eſt indubitablement quelque choſe de bien eſſentiel à l'action des forces, puisque c'eſt d'elle que dépend uniquement l'équilibre, de ſorte que, pourvû qu'on ait la valeur $\int P\,dx$, ſans avoir égard à la force même, on eſt en état de déterminer l'équilibre; ou bien la quantité $\int P\,dx$ concourt eſſentiellement à former l'équilibre. Il eſt donc très raiſonnable de donner à cette quantité un nom particulier, qui convienne à ſon emploi; & il me ſemble que celui d'*effort* n'exprime pas mal la nature de cet emploi.

XX. Pour juger donc de l'équilibre, il s'agit d'abord de trouver l'effort, qui convient à chaque force ſollicitante; pour cet effet ayant pris ſur la direction de la force un point fixe F, & mis la diſtance $AF = x$, on n'a qu'à multiplier la force même P par le différentiel de cette diſtance dx, & l'intégrale $\int P\,dx$ ſera l'effort de la force P. Alors le principe univerſel de l'équilibre, que nous venons de démontrer, ſera renfermé dans cette régle bien ſimple:

Que la ſomme de tous les efforts, auxquels un corps en équilibre eſt aſſujetti, eſt un Minimum.

XXI. Lorsque le corps, dont on cherche l'état d'équilibre, eſt fléxible ou même fluide, il en faut conſidérer ſéparément tous les élémens, & les forces, dont ils ſont ſollicités; pour en tirer d'abord les efforts, auxquels chaque élément eſt aſſujetti. Enſuite on trouvera par le calcul intégral la ſomme de tous les efforts, ou l'effort total, qui agit ſur le corps, & qui étant rendu un *Minimum*, montrera les conditions de l'équilibre. L'application que j'ai déjà faite de ce principe à une infinité de cas différens, tant par rapport à la nature des corps, qu'à la diverſité des forces, en fait ſuffiſamment voir l'importance, & les grands avantages, qu'on a encore lieu d'en eſpérer.

XXII. Je finirai par une remarque, qui ne contribuera pas peu à comprendre plus distinctement, comment ce principe est lié avec l'état d'équilibre. Cette remarque porte, qu'on n'a pas besoin d'introduire dans le calcul de l'équilibre les forces, qui attachent le corps à un objet fixe, ou qui le tiennent arrêté. Ainsi, pour trouver par cette méthode la courbure d'une chaine suspenduë, on ne regardera pas les forces, que soutiennent les clous, desquels la chaine est suspenduë; & lorsqu'il est question de l'équilibre d'un fluide renfermé dans un vaisseau, il n'est pas nécessaire de considérer les forces dont le vaisseau est pressé par le fluide. Mais dans l'un & l'autre cas il suffira de considérer les seules forces de la gravité pour en déterminer l'état d'équilibre.

XXIII. La raison de cette différence se comprend aisément par la manière dont nous avons considéré l'action des forces, qui consistoit dans la contraction des filets. Ainsi, s'il y a des forces à l'action desquelles le corps ne sçauroit obéïr, comme sont celles, dont le corps est soutenu, ou arrêté, ou attaché à un objet immobile, telles forces n'entreront point dans nôtre calcul, ou bien leurs efforts doivent être considérés comme évanouïssans, puisque les parties du corps qui en sont arrêtées, sont effectivement immobiles. Donc, ces forces étant excluës, il ne reste que les forces qui sont capables d'imprimer au corps quelque mouvement, qu'on doit considérer pour rechercher l'état d'équilibre, en prenant leurs efforts, & rendant leur somme un *Minimum*.



CALCUL